



ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ & ΕΜΜ. ΜΠΕΝΑΚΗ 38- ΠΛ. ΚΑΝΙΓΓΟΣ
ΤΗΛ/ΦΑΧ : 210-3825660

3^ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
19/8/17

ΘΕΜΑ 1^ο : 1. Έστω μία συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη στο $[a, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$ (μον. 5)

2. Διατυπώστε το Κριτήριο Παρεμβολής και αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} = 0$ (μον. 5)

3. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή ή Λάθος κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

A) Κάθε συνάρτηση που είναι «1-1» είναι γνησίως μονότονη.

B) Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε :

- Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0
- Δικαιολογείστε την απάντηση του προηγούμενου ερωτήματος.

Γ) Αν $f(x) = 5^x$ τότε $f'(x) = x5^{x-1}$

Δ) $\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu x dx = \sigma \nu \alpha - \sigma \nu \beta$

E) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = 0$ τότε το $f(x_0)$ είναι πάντα ακρότατο. (μον. 10)

ΘΕΜΑ 2^ο : Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 + 2ax + 5$ όπου

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + x}) - 3$$

1. Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ (μον. 5)

2. Αν $\alpha = -4$ να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (μον. 6)

3. Να αποδείξετε ότι $e^2 - \pi^2 < 4(\sqrt{e} - \sqrt{\pi})$ (μον. 7)

4. Αν $\alpha = -4$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$. (μον. 7)

ΘΕΜΑ 3^ο : Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το Σύνολο τιμών της (μον. 4)
2. Να μελετήσετε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (μον. 4)
3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες και να χαράξετε την γραφική της παράσταση (μον. 5)
4. Να υπολογίσετε το Εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζετε από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$. (μον. 6)
5. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}$ (μον. 6)

ΘΕΜΑ 4^ο : Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το \mathbb{R} και f' συνεχής για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (μον. 5)
2. Αν η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από τα σημεία $A(9,2)$, $B(4,3)$ τότε
 - I. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(5+f(x^2-1))=2$ (μον. 6)
 - II. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $2g(\xi) + \xi = 0$ (μον. 6)
3. Αν επιπλέον η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x\chi'$ στο σημείο $M(x_0, 0)$ τότε να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο M σχηματίζει με τον άξονα $x\chi'$ γωνία $\frac{\pi}{4}$. (μον. 8)

Να έχετε επιτυχία!!