



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΜΗΜΑΤΑ 03 04 07 15/7/17

ΘΕΜΑ Α) : Α1) Να αποδείξετε ότι κάθε συνάρτηση παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μον 10**

Α2) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται «ένα προς ένα» ; Δώστε παράδειγμα συνάρτησης που δεν είναι «1-1». **Μον 5**

Α3) Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή ή Λάθος κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

I. Ισχύει ότι $(\sin x)' = \eta \mu x$

II. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

III. Έστω μία συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και λ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \lambda) = 0$

IV. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

V. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Μον 10

ΘΕΜΑ Β) : Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f :

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f **Μον 2**

2) Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$,

β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$,

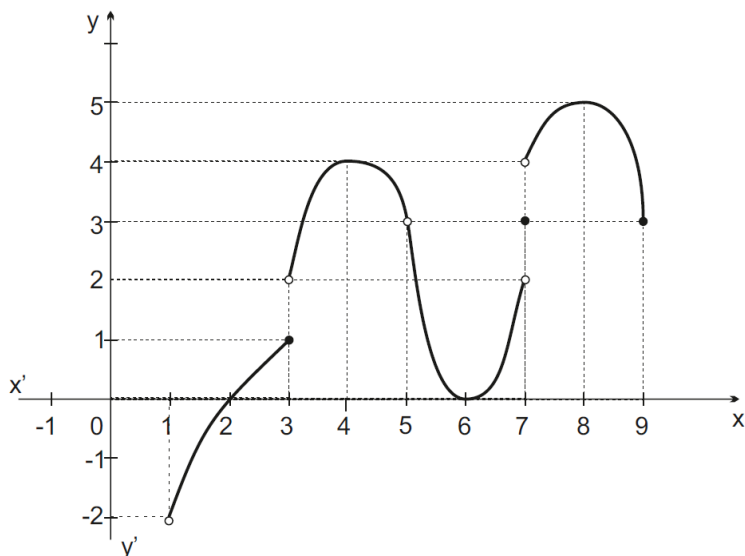
δ) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$, ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$ **Μον 5**

3) Να βρείτε αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$, b) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$ **Μον 9**

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



4) Υπολογίστε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x}{x^3}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \ln x)$ **Μοv 4**

5) Αν $f(x) = e^{-\lambda x}$ να βρείτε τις τιμές του λ ώστε $2f''(x) + f'(x) - 3f(x) = 0$ **Μοv 5**

ΘΕΜΑ Γ) : Δίδονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

I. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ **Μοv 10**

II. Έστω $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ με $x > 0$

α. Να βρείτε την $h'(x)$ **Μοv 2**

β. Να βρείτε την $h''(x)$ **Μοv 3**

γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ **Μοv 4**

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g(x)$ στο σημείο $A(0, g(0))$. **Μοv 6**

ΘΕΜΑ Δ) : Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1, & x > 1 \\ a, & x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x < 1 \end{cases}$

I. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ **Μοv 4**

II. Για $a=1$

1. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ **Μοv 4**

2. Για την f στο $[1, +\infty)$:

A. να βρείτε την $f'(x)$, $f''(x)$ **Μοv 4**

B. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα **Μοv 5**

Γ. να συγκρίνετε τους αριθμούς π^e, e^π **Μοv 8**

Σας ευχόμαστε «επιτυχία»!!